УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

СИСТЕМА СПЛАЙНІВ КЛАСУ $C^q(R^2)$, ЯКІ Є R – ФУНКЦІЯМИ ДВОХ ЗМІННИХ

Запропоновано і досліджено повну систему R – функцій двох змінних, істотно належних до класу $C^q(R^2)$, що складається з R – кон'юнкції $\wedge(x,y,q)=|x|^q x+|y|^q y-|x-y|^{q+1}$ та R – диз'юнкції $\vee(x,y,q)=|x|^q x+|y|^q y+|x-y|^{q+1}$, $q=0,1,...$ і R – заперечення $\overline{x}=-x$. Ці R – функції є поліноміальними сплайнами степеня $q+1, q=0,1,...$, дефекту 1. Вони є розв'язками системи рекурентних крайових задач для рівняння Пуассона, права частина яких теж є деякою R – функцією з меншим номером q.

Предложена и исследована полная система R – функций двух переменных, существенно принадлежащих классу $C^q(R^2)$, которая состоит из R – конъюнкции $\wedge(x,y,q)=|x|^q x+$ $+|y|^q y-|x-y|^{q+1}$, R – дизъюнкции $\vee(x,y,q)=|x|^q x+|y|^q y+|x-y|^{q+1}$, $q=0,1,...$ и R – отрицания $\overline{x}=-x$. Эти R – функции – полиномиальные сплайны степеня $q+1$, $q=0,1,...$, дефекта 1, являющиеся решениями системы рекуррентных краевых задач для уравнения Пуассона; правая часть этого уравнения Пуассона в свою очередь является R – функцией с меньшим номером q.

Full system of the R – functions of two variables essentially belonging to a class $C^q(R^2)$ is offered and investigated. This system consists from R – conjunction $\wedge(x,y,q)=|x|^q x+|y|^q y-|x-y|^{q+1}$, R – alternation $\vee(x,y,q)=|x|^q x+|y|^q y+|x-y|^{q+1}$, $q=0,1,...$ and R – negation $\overline{x}=-x$. These R – functions are polynomial splines of the degree $q+1$, $q=0,1,...$, defect of these splines is 1. The offered R – functions are the solutions the recurrently system of the boundary value problems for the Poisson's equation. Right part in these Poisson's equations are also R – functions with smaller number q.

Вступ. Теорія R – функцій, створена академіком НАН України *В.Л. Рвачовим* [1], дозволяє будувати рівняння границь складних областей D, на основі логічної структури побудови D за допомогою підобластей D_k, $k=1,...,M$. На даний час недосліджені R – функції, що є сплайнами класу $C^q\left(R^2\right)$, $q=0,1,...$.

Постановка задачі. Задача полягає у побудові повної системи R – функцій, що складається з R – кон'юнкції, R – диз'юнкції та R – заперечення, які є сплайнами класу $C^q\left(R^2\right)$, $q=0,1,...$, дослідженні їх властивостей і методу їх рекурентної побудови.

Основні твердження роботи.

Теорема 1. *Система функцій*

$$\wedge\left(x,y,q\right)=\left|x\right|^q x+\left|y\right|^q y-\left|x-y\right|^{q+1}, q=0,1,\dots,$$
$$\vee\left(x,y,q\right)=\left|x\right|^q x+\left|y\right|^q y+\left|x-y\right|^{q+1}, q=0,1,\dots, \tag{1}$$
$$\overline{x}=-x$$

є повною системою $R-$ *функцій двох змінних, істотно належних до класу* $C^q\left(R^2\right)$.

Доведення. Для доведення того, що це система функцій двох змінних, істотно належних до класу $C^q\left(R^2\right)$, достатньо зауважити, що кожний доданок у них $\left|x\right|^q x,\ \left|y\right|^q y,\ \left|x-y\right|^{q+1}$ має неперервні частинні похідні до порядку $q,\ q=0,1,\dots$ включно, оскільки

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left|x\right|^q x=\begin{cases}\left(q+1\right)\cdots\left(q-p+2\right)\left|x\right|^{q-p}x\in C^{q-p}\left(R^2\right),\ p=1,\dots,\ q-1,\\ \left(q+1\right)\cdots2\cdot1\cdot\left|x\right|\in C\left(R^2\right),\ p=q,\end{cases}$$

$$\frac{\partial^p}{\partial y^p}\left|x\right|^q x=0,\ p=1,2,\dots\ \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left|y\right|^q y=0,\ p=1,2,\dots,$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left|y\right|^q y=\begin{cases}\left(q+1\right)\cdots\left(q-p+2\right)\left|y\right|^{q-p}y\in C^{q-p}\left(R^2\right),\ p=1,\dots,q-1,\\ \left(q+1\right)\cdots2\cdot1\cdot\left|y\right|\in C\left(R^2\right),\ p=q.\end{cases}$$

Тобто, частинні похідні порядку $p=q,q\ge1$ є лише неперервними, похідні порядку $p=q+1$ є розривними.

Згідно з теорією $R-$ функцій [1], для того, щоб довести, що ці функції є $R-$ функціями, достатньо довести їх знакосталість у кожному з чотирьох квадрантів площини Oxy. Доведемо це.

У першому квадранті $x>0,y>0$ маємо

$$\wedge\left(x,y,q\right)=x^{q+1}+y^{q+1}-\left|x-y\right|^{q+1}>0,$$

оскільки $\max\{x^{q+1},y^{q+1}\}>\left|x-y\right|^{q+1}$.

У другому квадранті $x<0,y>0$ поклавши $x=-\beta y,\ \beta>0,$ отримаємо

$$\wedge\left(-\beta y,y,q\right)=-\beta^{q+1}y^{q+1}+y^{q+1}-y^{q+1}\left|\beta+1\right|^{q+1}=$$
$$=y^{q+1}\left(-\beta^{q+1}+1-\left|\beta+1\right|^{q+1}\right)<0,$$

оскільки $1-\left|\beta+1\right|^{q+1}<0,\ q=0,1,\dots$.

Аналогічно доводиться, що $\wedge\left(x,y,q\right)<0$ у четвертому квадранті $x>0,\ y<0$

Той факт, що $\wedge(x,y,q)<0$ у третьому квадранті $x<0,\ y<0$ витікає з того, що у цьому квадранті $|x|^q\, x = -|x|^{q+1}<0,\quad |y|^q\, y=-|y|^{q+1}<0,$ $-|x-y|^{q+1}\le 0$.

При переході точки (x,y) з одного квадранта у інший, маємо

$$\wedge(x,0,q)=|x|^q\, x-|x|^{q+1}=\begin{cases}0, x\ge 0;\\ -2|x|^{q+1},\ x<0,\end{cases}$$

$$\wedge(0,y,q)=|y|^q\, y-|y|^{q+1}=\begin{cases}0, y\ge 0;\\ -2|y|^{q+1},\ y<0.\end{cases}$$

Таким чином, функція $\wedge(x,y,q)$ додатна у першому квадранті, від'ємна у всіх інших трьох квадрантах і дорівнює нулю лише на додатних півосях. Тобто ця функція є $R-$кон'юнкцією.

Аналогічно доводиться, що функція $\vee(x,y,q)$ є від'ємною лише у третьому квадранті і додатною у першому, другому і четвертому квадрантах. Крім того, вона дорівнює нулю лише на від'ємних півосях. Тобто ця функція є $R-$диз'юнкцією.

Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. Система $\wedge(x,y,0)=x+y-|x-y|,\quad \vee(x,y,0)=x+y+|x-y|$, $\overline{x}=-x$ є добре відомою системою $R-$функцій [1].

Теорема 2. *Нормальні похідні від $R-$кон'юнкції та $R-$диз'юнкції, що визначаються формулами (1), не дорівнюють нулю на відповідних півосях.*

Доведення. Знайдемо частинну похідну за змінною x від $R-$кон'юнкції $\wedge(x,y,q)$ для $q\ge 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\wedge(x,y,q)=\frac{\partial}{\partial x}|x|^q\, x+\frac{\partial}{\partial x}|y|^q\, y-\frac{\partial}{\partial x}|x-y|^{q+1}=$$

$$=(q+1)|x|^q-(q+1)\cdot|x-y|^{q-1}(x-y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\wedge(x,y,q)\Big|_{x=0}=(q+1)|y|^{q-1}\, y=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ y=0,\\ (q+1)|y|^{q-1}\, y\ne 0,\ \text{якщо}\ y\ne 0.\end{cases}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial}{\partial y}\wedge(x,y,q)\Big|_{y=0}=(q+1)|x|^{q-1}\, x=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x=0,\\ (q+1)|x|^{q-1}\, x\ne 0,\ \text{якщо}\ x\ne 0.\end{cases}$$

Знайдемо частинну похідну за змінною x від $R-$диз'юнкції $\vee(x,y,q)=|x|^q\, x+|y|^q\, y+|x-y|^{q+1}$ для $q\ge 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\vee(x,y,q)=\frac{\partial}{\partial x}|x|^q x+\frac{\partial}{\partial x}|y|^q y+\frac{\partial}{\partial x}|x-y|^{q+1}=$$
$$=(q+1)|x|^q+(q+1)\cdot|x-y|^{q-1}(x-y);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\vee(x,y,q)_{x=0}=(q+1)|y|^{q-1}y=\begin{cases}0, \text{ якщо } y=0,\\ (q+1)|y|^{q-1}y\neq 0, \text{ якщо } y\neq 0.\end{cases}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial}{\partial y}\vee(x,y,q)\Big|_{y=0}=(q+1)|x|^{q-1}x=\begin{cases}0, \ x=0,\\ (q+1)|x|^{q-1}x\neq 0, \text{ якщо } x\neq 0.\end{cases}$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. *Запропоновані $R-$кон'юнкція та $R-$диз'юнкція є кусково-поліноміальними сплайнами степеня $q+1,\ q\geq 0$ дефекту 1.*

Доведення. Для доведення твердження теореми 3 вказані функції використовують для своєї побудови операцію знаходження абсолютної величини, тобто для їх доданків справедливі співвідношення

$$|x|^q x=\begin{cases}x^{q+1}, \ x>0;\\ -x^{q+1}, \ x\leq 0,\end{cases} \qquad |y|^q y=\begin{cases}y^{q+1}, \ y>0;\\ -y^{q+1}, \ y\leq 0,\end{cases}$$
$$|x-y|^{q+1}=\begin{cases}(x-y)^{q+1}, \ x-y>0,\\ -(x-y)^{q+1}, \ x-y\leq 0.\end{cases}$$

Тому вся площина R^2 може бути розбита на вісім підобластей

$$D_1=\{x>0.y>0.y\leq x\},\ \ D_2=\{x>0.y>0.y>x\},$$
$$D_3=\{x<0.y<0.y\leq x\},\ D_4=\{x<0.y<0.y>x\},\ \ D_5=\{x<0.y>0, y>-x\},$$
$$D_6=\{x<0.y>0, y\leq -x\},\ D_7=\{x>0.y<0, y\leq -x\},\ D_8=\{x>0.y<0, y>-x\},$$

у кожній з яких $R-$кон'юнкція та $R-$диз'юнкція є поліномами степеня $q+1$

$$\wedge(x,y,q)=|x|^q x+|y|^q y-|x-y|^{q+1}=\begin{cases}x^{q+1}+y^{q+1}-(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_1\\ x^{q+1}+y^{q+1}-(y-x)^{q+1},(x,y)\in D_2\\ (-1)^q x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}-(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_3\\ (-1)^q x^{q+1}-(-1)^q y^{q+1}-(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_4\\ (-1)^q x^{q+1}+y^{q+1}-(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_5\\ x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}-(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_6\\ x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}-(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_7\\ x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}-(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_8\end{cases}$$

$$\vee(x,y,q)=|x|^q x+|y|^q y-|x-y|^{q+1}=\begin{cases} x^{q+1}+y^{q+1}+(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_1 \\ x^{q+1}+y^{q+1}+(y-x)^{q+1},(x,y)\in D_2 \\ (-1)^q x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}+(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_3 \\ (-1)^q x^{q+1}-(-1)^q y^{q+1}+(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_4 \\ (-1)^q x^{q+1}+y^{q+1}+(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_5 \\ x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}+(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_6 \\ x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}+(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_7 \\ x^{q+1}+(-1)^q y^{q+1}+(-1)^{q+1}(x-y)^{q+1},(x,y)\in D_8 \end{cases}$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. *Система запропонованих $R-$ кон'юнкцій та $R-$ диз'юнкцій є рекурентними розв'язками наступної системи рівнянь Пуассона:*

$$\Delta\wedge(x,y,q+2)=(q+3)(q+2)\wedge(x,y,q),\ (x,y)\in R^2,\ q=0,1,...,$$

$$\Delta\vee(x,y,q+2)=(q+3)(q+2)\vee(x,y,q),\ (x,y)\in R^2,\ q=0,1,....$$

Тут $\Delta u(x,y)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Доведення. Напишемо наступну систему співвідношень, що є наслідком записаних вище формул

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|x|^{q+2}x=\frac{\partial}{\partial x}\left((q+3)|x|^{q+2}\right)=(q+3)(q+2)|x|^q x,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|y|^{q+2}y=\frac{\partial}{\partial y}\left((q+3)|y|^{q+2}\right)=(q+3)(q+2)|y|^q y,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|x-y|^{q+3}=(q+3)\frac{\partial}{\partial x}|x-y|^{q+1}(x-y)=(q+3)(q+2)|x-y|^{q+1},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|x-y|^{q+3}=-(q+3)\frac{\partial}{\partial y}|x-y|^{q+1}(x-y)=(q+3)(q+2)|x-y|^{q+1}.$$

В результаті отримаємо

$$\Delta\wedge(x,y,q)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\wedge(x,y,q)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(|x|^{q+2}x+|y|^{q+2}y-|x-y|^{q+3}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}|x|^{q+2}x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|y|^{q+2}y-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|x-y|^{q+3}=(q+3)(q+2)|x|^q x+$$

$$+(q+3)(q+2)|y|^q y-(q+3)(q+2)|x-y|^{q+1}=(q+3)(q+2)\wedge(x,y,q).$$

Таким чином, перше твердження теореми 4 доведене.

Для доведення другого твердження, напишемо наступні співвідношення

$$\Delta \vee (x,y,q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \vee (x,y,q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(|x|^{q+2} x + |y|^{q+2} y + |x-y|^{q+3}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}|x|^{q+2} x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|y|^{q+2} y + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|x-y|^{q+3} = (q+3)(q+2)|x|^q x +$$

$$+ (q+3)(q+2)|y|^q y + (q+3)(q+2)|x-y|^{q+1} = (q+3)(q+2) \vee (x,y,q)$$

Теорема 4 доведена.

Зауваження 1. Вказані $R-$функції задовольняють відповідним диференціальним рівнянням Пуассона, праві частини яких є теж $R-$функціями з меншим порядком і при цьому дорівнюють нулю на відповідних півосях, згідно з теоремою 1. Тобто, ці $R-$функції можна знаходити за допомогою рекурентної процедури, що полягає у розв’язанні послідовності відповідних диференціальних рівнянь Пуассона.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому автор планує побудувати сплайни від $n, n = 2,3,...$ змінних, які є $n-$арними $R-$функціями та дослідити деякі їх застосування..

Висновки. Побудовану повну систему $R-$функцій класу $C^q\left(R^2\right)$, $q = 0,1,...$, яка складається з $R-$кон’юнкції $\wedge(x,y,q) = |x|^q x + |y|^q y - |x-y|^{q+1}$, $R-$диз’юнкції $\vee(x,y,q) = |x|^q x + |y|^q y + |x-y|^{q+1}$, $q = 0,1,...$ та $R-$заперечення $\bar{x} = -x$. Досліджено деякі їх властивості, зокрема доведено, що ці $R-$функції є сплайнами степеня q дефекту 1. Цей факт може позитивно вплинути на створення загальної теорії поліноміальних сплайнів, заданих різними формулами на різних частинах заданої області. Запропоновано метод їх рекурентної побудови.

Список літератури. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наукова думка, 1982. – 550 с.

Надійшла до редколегії 08.05.2012